Espectroscopia Hadrônica : Álgebra Linear, Mecânica Quântica e Física de Partículas

Wesley Spalenza[1]

Instituto Federal do Espírito Santo - Ifes
Campus Cariacica

[1] *wspalenza@gmail.com*

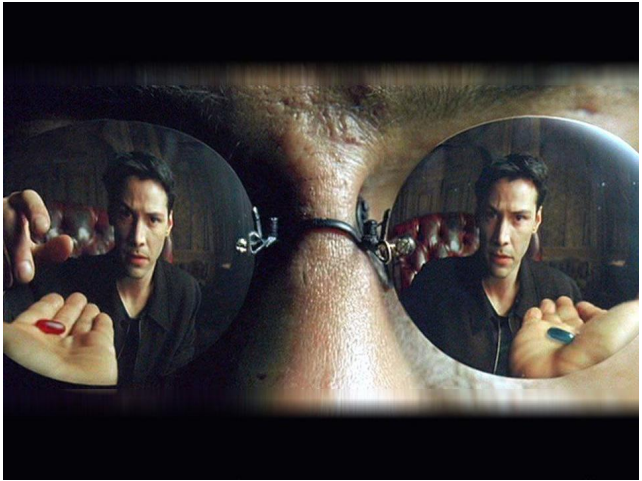
24 de agosto de 2019

Índice

Introdução e Motivação

Introdução e Motivação

Perguntamos aos alunos qual pílula irão escolher!



Introdução e Motivação

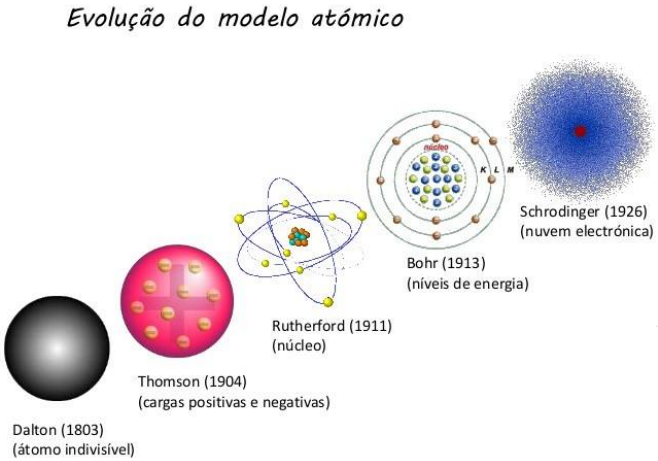
O que são partículas? Átomos, moléculas, física, etc ?!?!?!?

O que são Hadrons, Mesons, Leptons? O que é espectroscopia?

Como os físicos definem uma partícula, elementar ou não?

Como os físicos classificam essas partículas?

Introdução e Motivação



Introdução e Motivação

- Na decada de 1920 Werner Karl Heisenberg (Alemanha, 1901 — 1976) propôs um mixing entre Álgebra Vetorial e Matricial (a álgebra linear) e Mecânica Quântica;
- Ajudou na evolução da construção de modelos atômicos e nucleares, usando conceitos e classificações espectroscópicas - Teorema espectral para operadores auto-adjuntos em espaços de Hilbert;
- Na decada de 1930 Wolfgang Ernst Pauli (Áustria, 1900 — 1958) usou a teoria de grupos para classificar o SPIN do elétron - Grupo $SU(2)$;
- Nesta mesma decada, Hermann Klaus Hugo Weyl (Alemanha, 1885 — 1955) e outros físicos mostraram que o Spin tem uma interpretação relativística - $SO(1,3) = SU_L(2) \otimes SU_R(2)$. A construção se completou com a introdução de um termo de translação, dando origem a um novo grupo, o grupo de Jules Henri Poincaré (França, 1854 — 1912).

Introdução e Motivação

- Entre as décadas de 1920 e 1930, a mecânica quântica atômica estava sendo consolidada por Paul Adrien Maurice Dirac (Inglaterra, 1902 – 1984), Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (alemanha, 1887 – 1961) e muitos outros;
- A Física fotônica vinha sendo desenvolvida por muitas mãos, como Heinrich Rudolf Hertz (Alemanha, 1857 – 1894), Albert Einstein (Alemanha, 1879 – 1955) e tantos outros;
- Mais a frente, os físicos Weyl, Vladimir Aleksandrovich Fock (Russia, 1898 — 1974) and Fritz Wolfgang London (Alemanha, 1900 — 1954), caracterizaram o fóton como uma partícula invariante sob transformações grupo complexo de calibre $U(1)$.

Introdução e Motivação

- Nas décadas de 1940 e 1950 muitas partículas, por choque de núcleos atômicos, foram detectadas, pelo avanço e construção de novos aceleradores - necessidade do modelo de Pauli-Heisenberg;
- Na decada de 1930 Wolfgang Ernst Pauli (Áustria, 1900 — 1958) criou um novo número quântico, o Spin isotópico (Isospin) para classificar partículas nucleares - grupo $SU(2)$ - Modelo de Pauli-Heisenberg.
- O modelo do spin isotópico tem como grupo de simetria o grupo $SU(2)$, que pode descrever os quarks de sabores UP (u) e DOWN (d);

Introdução e Motivação

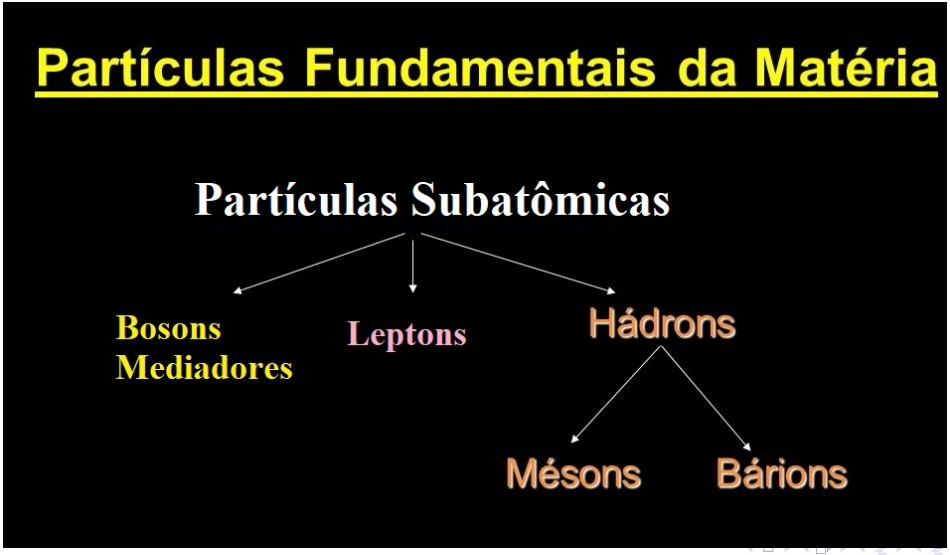
- Em 1955 Murray Gell-Mann (EUA, 1929 – 2019) propõe o número quântico de estranheza para explicar os decaimentos de partículas exóticas, onde aparecia teoriacamente o quark Strange (s);
- No início de 1954, Chen Ning-Yang (China, 1922 -) e Robert Laurence Mills (EUA, 1927 – 1999) estenderam o conceito de teoria de calibre de grupos abelianos (a eletrodinâmica quântica) à grupos não-abelinos para dar uma explicação as interações fracas e fortes.
- A ideia foi posta de lado até 1960, quando o conceito de partículas que adquirem massa através da quebra de simetria em teorias sem massa foi apresentado, inicialmente por Jeffrey Goldstone (Inglaterra, 1933 -) , Yoichiro Nambu (Japão, 1921 - 2015) e Giovanni Jona-Lasinio (Itália, 1932 -).

Introdução e Motivação

- Em 1961 Murray Gell-Mann (EUA, 1929 — 2019), Abraham Pais (Holanda, 1918 — 2000) e Kazuhiko Nishijima (Japão, 1926 - 2009) propuseram o modelo de interação forte via grupo $SU(3)$ - The Eightfold Way;
- Em 1964 George Zweig (Russia, 1937 -) propõe o modelo dos quarks baseado no grupo $SU(3)$;
- No mesmo ano Gell-Mann propõe o seu modelo dos quarks baseado no grupo $SU(3)$ para descrever Hadrons e Mesons;
- Em 1964 Peter Ware Higgs (Escócia, 1929 -) propôs um campo necessário para gerar massa à todas as partículas, trabalho feito para o modelo eletrofraco, previsto experimentalmente e oficializado em 4 de julho de 2012;

Introdução e Motivação

- Entre as décadas 1950 e 1960, Steve Weinberg (EUA, 1933 -), Mohammad Abdus Salam (Pasquistão, 1926 — 1996)) e Sheldon Lee Glashow (EUA, 1932 -), unificaram as interações eletromagnética e fraca em uma teoria $SU(2) \otimes U(1)$, teoria eletrofraca.
- O modelo padrão foi proposto como unificação da teoria eletrofraca com a cromodinâmica quântica, a partir da proposta da liberdade assintótica em 1973 por David Gross (EUA, 1941 -), Frank Wilczek (EUA, 1951 -) e David Politzer (EUA, 1949 -)
- Os físicos que contribuiram para a unificação foram Abraham Pais (Holanda, 1918 — 2000), Sam Treiman (EUA, 1925 — 1999), Gerard 't Hooft (Holanda, 1946 -) e outros com publicações na segunda metade da década 1970, com uma simetria local $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.


Partículas Fundamentais da Matéria
Partículas Subatômicas
Bosons Mediadores
Leptons
Hádrons
Mésons
Bárions

Introdução e Motivação

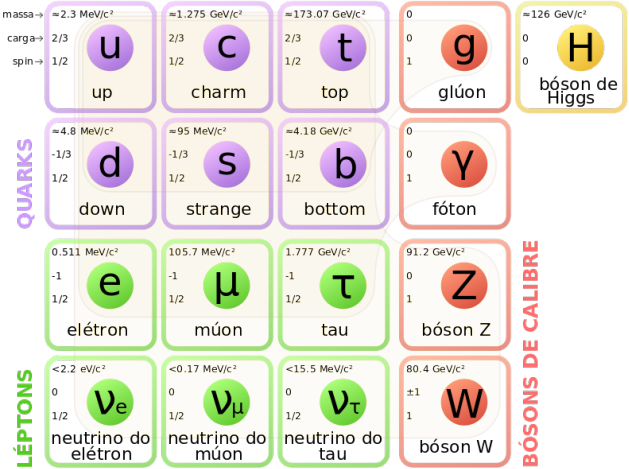


Figura: Classificação do modelo padrão

A Álgebra Linear e a Mecânica Quântica

A álgebra Linear e a Mecânica Quântica

Álgebra Linear que rege os princípios matemáticos usados na M.Q., ou melhor os estados quânticos.

- $\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^*$;
- $\langle\varphi|\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2\rangle = \lambda_1 \langle\varphi|\psi_1\rangle + \lambda_2 \langle\varphi|\psi_2\rangle$;
- $\langle\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2|\varphi\rangle = \lambda_1^* \langle\varphi_1| + \lambda_2^* \langle\varphi_2|$;
- $\langle\psi|\psi\rangle$ só se anula se $|\psi\rangle = 0$, senão o resultado é positivo.

Vetor (ket) que define um estado em termos de "sub-estados".
$|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle$,

A álgebra Linear e a Mecânica Quântica

Para achar os coeficientes c_i's:

$$
\begin{aligned}
\langle u_j|\psi\rangle &= \langle u_j| \sum_i c_i \, |u_i\rangle \, , \\
&= \sum_i \langle u_j| \, c_i \, |u_i\rangle \, , \\
&= \sum_i c_i \, \langle u_j|u_i\rangle \, , \\
&= \sum_i c_i \delta_{ij}, \qquad\qquad \langle u_j|u_i\rangle = \delta_{ij} \\
&= c_j,
\end{aligned}
$$

Relação de Completeza,

$$
\sum_i |u_i\rangle \, \langle u_i| \quad = \quad 1
$$

A álgebra Linear e a Mecânica Quântica

Do modelo de acoplamento Spin-órbita no átomo de hidrogênio, iremos estudar a soma de momentos angulares.

O momento angular total $\vec{J}$ é a soma dos momentos angulares de cada partícula:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

sendo $\vec{L}$ o momento angular orbital e $\vec{S}$ o momento angular intrínseco do Spin do elétron. O momento angular total satisfaz as relações de comutação:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] &= i\hbar\hat{J}_z \\
\left[\hat{J}_y, \hat{J}_z\right] &= i\hbar\hat{J}_x \\
\left[\hat{J}_z, \hat{J}_x\right] &= i\hbar\hat{J}_y
\end{aligned}$$

A álgebra Linear e a Mecânica Quântica

Módulo do momento angular total,

$$\hat{J}^2 = \hat{\vec{J}} \cdot \hat{\vec{J}} = \hat{J}_x{}^2 + \hat{J}_y{}^2 + \hat{J}_z{}^2$$

$\hat{J}^2$ é hermitiano juntamente com $\hat{J}$ e os dois operadores comutam.

$$\left[\hat{J}^2, \hat{J}\right] = 0$$

Ou seja,

$$\left[\hat{J}^2, \hat{J}_x\right] = 0, \qquad \left[\hat{J}^2, \hat{J}_y\right] = 0, \qquad \left[\hat{J}^2, \hat{J}_z\right] = 0$$

A álgebra Linear e a Mecânica Quântica

Ao invés de $\hat{J}_x$ e $\hat{J}_y$, é mais conveniente estudar a combinação linear entre eles,

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y, \qquad \hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$$

onde as relações de comutação entre os operadores são,

$$\left[\hat{J}^2, \hat{J}_+\right] = \left[\hat{J}^2, \hat{J}_-\right] = \left[\hat{J}^2, \hat{J}_z\right] = 0$$

O operador quadrado agora é redefinido para,

$$\hat{J}^2 = \frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+) + \hat{J}_z^2$$

A álgebra Linear e a Mecânica Quântica

Por umas continhas fofas, chegamos à

$$\hat{J}^2 |\varphi\rangle = j(j+1)\hbar^2 |\varphi\rangle , \qquad \hat{J}_z |\varphi\rangle = m\hbar |\varphi\rangle$$

que implica em uma base comum.

- Autovalores possíveis de j = 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, ...
- Para um j fixo, tem-se $(2j+1)$ valores possíveis para m: $\boxed{-j, -j+1, ..., j-1, j}$ representados pelo estado $|\varphi\rangle = |j, m\rangle$, tal que

$$\begin{cases} \hat{J}_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle \\ \hat{J}_\pm |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle \\ \hat{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \end{cases}$$

Os Coeficientes de Clebsh-Gordan

Sejam $|j_1, m_1\rangle$ e $|j_2, m_2\rangle$ as bases das representações (irredutíveis) caracterizadas por auto-valores discretos j_1 e j_2, que possuem $2j_1 + 1$ e $2j_2 + 1$ vetores, respectivamente. A base correspondente a representação $j_1 \otimes j_2$ é o produto tensorial das bases,

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle\, |j_2, m_2\rangle = |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

de dimensão $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. Esta base é uma base vetorial complexa do espaço $\mathbb{C}^2$ e o espaço das matrizes referencia-se ao grupo $SU(2)$, de onde vem a dimensionalidade dos auto-valores.

Para descrever todas as propriedades da representação final, podemos escrever $|j,m\rangle$ em termos da base $|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle$ de dimensão $(2j_1+1)(2j_2+1)$, com isso

$$\begin{aligned}
|j,m\rangle &= \mathbb{1}\,|j,m\rangle\,, \\
&= \sum_{m_1,m_2} |j_1,j_2,m_1,m_2\rangle\,\langle j_1,j_2,m_1,m_2|j,m\rangle\,, \\
&= \sum_{m_1,m_2} \mathbb{C}^{j_1 j_2}_{m_1 m_2}\,|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle\,,
\end{aligned}$$

sendo $\langle j_1,j_2,m_1,m_2|j,m\rangle = \mathbb{C}^{j_1 j_2}_{m_1 m_2}$ os coeficientes de Clebsch-Gordan

Tabela: Tabela dos Coeficientes de Clebsch-Gordan para a composição da representação $j_1 = 1$ e $j_2 = 1/2$

		j	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
		m	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
m_1	m_2							
1	$\frac{1}{2}$		1					
1	$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$			
0	$\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$			
0	$-\frac{1}{2}$					$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
-1	$\frac{1}{2}$					$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	
-1	$-\frac{1}{2}$							1

O GRUPO $SU(2)$

O Grupo SU(2) e o Spin Isotópico

- Heisenberg em 1932 propõe a simetria do spin isotópico baseado nas massas do próton e do nêutron.
- Segundo esta simetria próton e nêutron formam uma família (dublete).
- O spin isotópico se conserva nas interações fortes.

Partícula	I	I_3	B	S	Q(e)	Massa (Mev)
p	$1/2$	$1/2$	1	0	1	938
n	$1/2$	$-1/2$	1	0	0	939

Tabela: Próton e nêutron com seus números quânticos e suas respectivas massas. Fonte: particle data group 2018.

Verificando conservação do spin isotópico em decaimentos

Pode-se verificar a conservação (ou não) do spin isotópico, carga elétrica, número bariônico e estranheza nos decaimentos abaixo.

$$
\begin{aligned}
\Delta^{++} &\rightarrow \pi^{+} + p \\
\Delta^{+} &\rightarrow \pi^{0} + p \\
\Delta^{-} &\rightarrow \pi^{-} + n \\
\Lambda^{0} &\rightarrow p + \pi^{-} \\
\Omega^{-} &\rightarrow \Lambda^{0} + K^{-}
\end{aligned}
$$

- Ver um Jogo de Tabuleiro (Produto do MNPEF) que nosso aluno Maik Caliari Lebarck construiu, para Ensino Médio.

Definindo Estados e Operadores

- Definimos um estado com o spin isotópico em um vetor $|t, t_3\rangle$
- Vamos definir os seguintes operadores:

$$T_1 \equiv \sigma_1, \quad T_2 \equiv \sigma_2, \quad T_3 \equiv \sigma_3, \quad T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2.$$

- Também vamos definir os seguintes operadores escada:

$$T_\oplus \equiv T_1 + T_2, \quad T_\ominus \equiv T_1 - T_2, \quad T_\oplus^\dagger = T_\ominus$$

- Relação de comutação entre os operadores:

$$[T_\oplus, T_\ominus] = 2T_3, \quad [T_3, T_\oplus] = T_\oplus, \quad [T^2, T_i] = 0$$

Atuação dos operadores em $|t, t_3\rangle$

- A terceira componente do spin isotópico é autovalor da seguinte equação:

$$T_3 |t, t_3\rangle = t_3 |t, t_3\rangle$$

- A Atuação do operador casimir na base é:

$$T^2 |t, t_3\rangle = t(t+1) |t, t_3\rangle$$

- Os operadores escada atuam na base $|t, t_3\rangle$ da seguinte forma:

$$T_3(T_\oplus |t, t_3\rangle) = (t_3 + 1)(T_\oplus |t, t_3\rangle)$$
$$T_3(T_\ominus |t, t_3\rangle) = (t_3 - 1)(T_\ominus |t, t_3\rangle)$$

Formalismo de Pauli para Hádrons

Do ponto de vista da mecânica quântica do oscilador harmônico e da teoria quântica de campos, existem operadores de criação e destruição de estados ou partículas, que aqui tomamos tais conceitos aplicados aos prótons, aos nêutrons, e outras partículas. Para prótons e nêutrons temos, $a_p^\dagger$, $a_n^\dagger$, a_p, a_n. Onde $a^\dagger$ indica criação e a, destruição. Com isso, podemos escrever,

$$\begin{aligned} a_n \left|p\right\rangle &= 0, \qquad & a_p^\dagger \left|0\right\rangle &= \left|p\right\rangle, \\ a_p \left|n\right\rangle &= 0, \qquad & a_n^\dagger \left|0\right\rangle &= \left|n\right\rangle \end{aligned}$$

Vale também para o caso de criação,

$$a_p^\dagger \left|p\right\rangle = 0, \qquad a_n^\dagger \left|n\right\rangle = 0. \qquad \text{máximo do momento angular}$$

Temos ainda a destruição de partículas,

$$
\begin{aligned}
a_p \left|p\right\rangle = & \quad \left|0\right\rangle , \\
a_n \left|n\right\rangle = & \quad \left|0\right\rangle ,
\end{aligned}
$$

onde $\left|0\right\rangle$ representa um estado sem partículas. Destes, agora podemos criar do nada, um estado com uma partícula,

$$
\begin{aligned}
a_p^\dagger \left(a_n \left|n\right\rangle\right) = & \quad a_p^\dagger \left(\left|0\right\rangle\right) = \left|p\right\rangle , \\
a_n^\dagger \left(a_p \left|p\right\rangle\right) = & \quad a_n^\dagger \left(\left|0\right\rangle\right) = \left|n\right\rangle , \\
a_p^\dagger \left(a_p \left|p\right\rangle\right) = & \quad a_p^\dagger \left(\left|0\right\rangle\right) = \left|p\right\rangle , \\
a_n^\dagger \left(a_n \left|n\right\rangle\right) = & \quad a_n^\dagger \left(\left|0\right\rangle\right) = \left|n\right\rangle .
\end{aligned}
$$

O isospin é associado ao operador de momento angular na direção z, aqui vamos chamar de T_3, com momento angular t_3.

$$\begin{aligned} \text{próton:} \qquad |p\rangle &= |t, t_3\rangle = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \,, \\ \text{nêutron:} \qquad |n\rangle &= |t, t_3\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \,, \end{aligned}$$

A atuação do momento angular na direção z, o operador de isospin na direção z, fica,

$$\begin{aligned} \text{próton:} \qquad T_3 \, |p\rangle &= \frac{1}{2} \, |p\rangle \,, \\ \text{nêutron:} \qquad T_3 \, |n\rangle &= -\frac{1}{2} \, |n\rangle \,. \end{aligned}$$

Como $a_n \, |p\rangle = 0$, aplicando $a_n^\dagger \, a_n \, |p\rangle = 0$ e subtraímos um termo nulo em $-\frac{1}{2} a_n^\dagger \, a_n \, |p\rangle = 0$, na equação $T_3 \, |p\rangle$.

$$T_3 \left|p\right\rangle = \frac{1}{2} a_p^\dagger a_p \left|p\right\rangle - \frac{1}{2} a_n^\dagger a_n \left|p\right\rangle ,$$

A carga e o número bariônico também podem ser escritos em termos dos operadores de criação e aniquilação,

$$\begin{aligned} Q &= a_p^\dagger a_n, \\ B &= a_p^\dagger a_p + a_n^\dagger a_n. \end{aligned}$$

E com isso podemos estabelecer uma relação entre as três grandezas conservadas,

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} Y, \qquad Y = B \qquad \text{Relação de Pauli}$$

Embora a dedução da carga tenha sido feita para os prótons e os nêutrons, ela é válida para todos os outros hádrons devido a simetria $SU(2)$.

Tabela de Pesos : Exemplo: Partículas Deltas

- Quando duas partículas interagem entre si, os seus isospins se combinam para produzir estados com diferentes multiplicidades.
- Uma forma de realizar esse produto tensorial, é através do diagrama de pesos de cada representação irredutível.

Diagramas de Pesos e Classificação de Hádrons por SU(2)

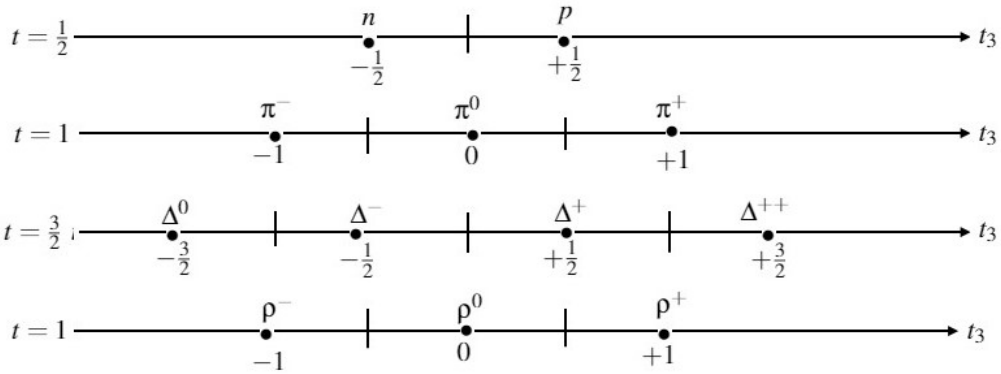


Figura: Diagramas de pesos de Bárions e Mésons

Tabela de Pesos de Algumas Partículas

Por exemplo, para partículas Delta definida por $t = 3/2$, que nos dá:

$$t_3 = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}$$

Partículas

$$t_3 = +\frac{3}{2} \quad : \quad |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |\Delta^{++}\rangle$$
$$t_3 = +\frac{1}{2} \quad : \quad |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |\Delta^{+}\rangle$$
$$t_3 = -\frac{1}{2} \quad : \quad |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |\Delta^{0}\rangle$$
$$t_3 = -\frac{3}{2} \quad : \quad |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |\Delta^{-}\rangle$$

Decaimentos das partículas delta

Partícula Δ^+

Verifica-se o seguinte decaimento,

$$\Delta^+ \longrightarrow \pi^0 + p, \qquad \text{ou} \qquad \Delta^+ \longrightarrow \pi^+ + n$$

$$\begin{aligned} |\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,0\rangle\,|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1,1\rangle\,|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\ |\Delta^+\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\pi^0\rangle\,|p\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi^+\rangle\,|n\rangle \end{aligned}$$

A probabilidade de ocorrência de $|\pi^0\rangle$: 66,66%
A probabilidade de ocorrência de $|\pi^+\rangle$: 33,33%

Decaimentos das partículas delta

Partícula Δ^{++}

Verifica-se o seguinte decaimento,

$$\Delta^{++} \longrightarrow \pi^{+} + p$$

A representação no espaço de estados fica:

$$\begin{aligned} |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle &= |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle = |1, 1\rangle\, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\Delta^{++}\rangle &= 1\, |\pi^{+}\rangle\, |p\rangle \end{aligned}$$

A probabilidade de ocorrência é 100%

Decaimentos das partículas delta

Partícula Δ^0

Verifica-se o seguinte decaimento,

$$\Delta^0 \longrightarrow \pi^- + p \qquad \text{ou} \qquad \Delta^0 \longrightarrow \pi^0 + n$$

A representação no espaço de estados fica:

$$\begin{aligned} |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,-1\rangle\,|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1,0\rangle\,|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\ |\Delta^0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi^-\rangle\,|p\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\pi^0\rangle\,|n\rangle \end{aligned}$$

A probabilidade de ocorrência de $|\pi^-\rangle$: 33,33%
A probabilidade de ocorrência de $|\pi^0\rangle$: 66,66%

Decaimentos das partículas delta

Partícula Δ^-

Verifica-se o seguinte decaimento,

$$\Delta^- \longrightarrow \pi^- + n$$

A representação no espaço de estados fica:

$$\begin{aligned} |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle &= |1, -1\rangle \, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \, , \\ |\Delta^-\rangle &= 1 \, |\pi^-\rangle \, |n\rangle \end{aligned}$$

A probabilidade de ocorrência é 100%

O GRUPO $SU(3)$

O Grupo $SU(3)$

- O grupo SU(3) é definido em um espaço complexo tridimensional $\mathbb{C}^3$, que mantém invariante o produto escalar entre os vetores, e desta forma chegamos a relação:

$$\begin{aligned} R &= e^{i\theta_a \cdot \frac{\lambda_a}{2}} \qquad a = 1, 2, 3...8 \\ R^\dagger R &= \mathbb{I} \quad \text{(Unitariedade)} \\ det(R) &= 1 \end{aligned}$$

- A álgebra do Grupo SU(3), é caracterizada por:

$$\lambda^\dagger = \lambda$$
$$tr(\lambda) = 0$$

- Expandindo a matriz mais geral da álgebra do Grupo SU(3) é possível obtermos as matrizes de Gell-Mann:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda_5 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda_6 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_7 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- O Grupo SU(3) é dito não-Abeliano, pois $[\lambda_a, \lambda_b] = i \cdot f_{abc} \cdot \lambda_c$, onde $f_{123} = 1$

Isospin, Hipercarga e Operadores escada

- Um estado agora tem a representação $|I, I_3, y\rangle \longrightarrow |I_3, y\rangle$
- O isospin é dado por $T_3 |I_3, y\rangle = I_3 |I_3, y\rangle$, onde $T_3 = \lambda_3$
- A hipercarga é escrita como $Y |I_3, y\rangle = y |I_3, y\rangle$ onde $Y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \lambda_8$.
- Define-se também operadores escada, a partir das matrizes de Gell-Mann,

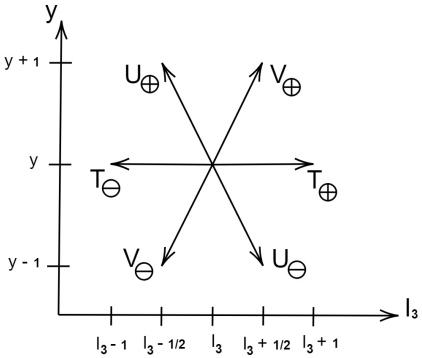
$$T_\pm \equiv (\lambda_1 \pm i\lambda_2)$$
$$U_\pm \equiv (\lambda_6 \pm i\lambda_7)$$
$$V_\pm \equiv (\lambda_4 \pm i\lambda_5).$$

Isospin, Hipercarga e Operadores escada

- Para montar qualquer diagrama de peso precisamos definir os extremos

$$|I_{3\,\text{máx}}, y\rangle\,, \qquad |I_3, y_{\text{máx}}\rangle\,, \qquad |I_{3\,\text{mín}}, y\rangle\,, \qquad |I_3, y_{\text{mín}}\rangle$$

- Diagrama de atuação dos operadores escada.



Isospin, Hipercarga e Operadores escada

Dimensionalidade:

$$D(p,q) = \frac{1}{2}(p+q+2)\cdot(p+1)\cdot(q+1),$$

onde p e q são espaços entre dois pontos adjacentes. Definimos os máximos e mínimos:

$$\begin{aligned}
I_{3\,\text{máx}} &= \frac{1}{2}\cdot(p+q), \qquad y = \frac{1}{3}\cdot(p-q),\\
y_{\text{máx}} &= \frac{1}{3}\cdot p + \frac{2}{3}\cdot q, \qquad I_3 = \frac{1}{2}\cdot p,\\
y_{\text{mín}} &= -\frac{2}{3}\cdot p - \frac{1}{3}\cdot q, \qquad I_3 = \frac{1}{2}\cdot q,\\
I_{3\text{min}} &= -\frac{1}{2}\cdot(p+q), \qquad y = \frac{1}{3}\cdot(p-q).
\end{aligned}$$

Possíveis valores de Isospin $I_3 = I_3, I_3-1, I_3-2, ..., -I_3+1, -I_3$

Exemplo: Representação 1: $p = 0,\ q = 0$

$$D(0,0) = 1,$$

e

$$|I_{3\,\text{máx}}, y\rangle = |0,0\rangle\,, \qquad |I_3, y_{\text{máx}}\rangle = |0,0\rangle$$

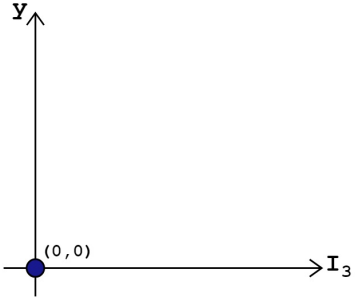


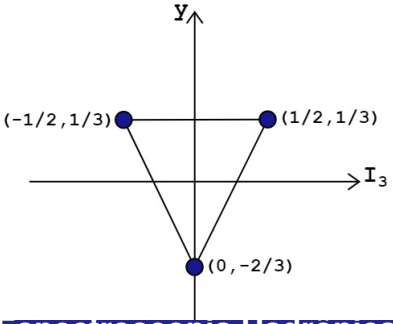
Figura: Diagrama de pesos da representação de dimensão 1

Isospin, Hipercarga e Operadores escada

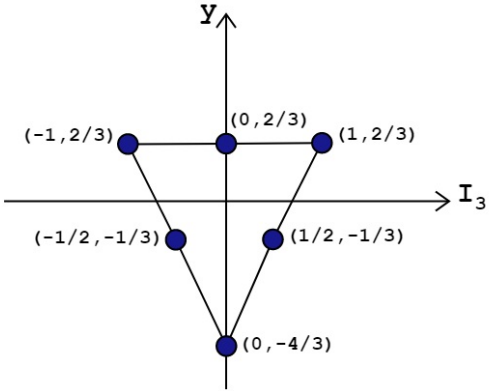
Exemplo: Representação 3: $p = 1,\ q = 0 \qquad D(1,0) = 3$, Estados:

$$|I_{3\,\text{máx}}, y\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle\,, \qquad |I_3, y_{\text{máx}}\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle\,, \qquad |I_3, y_{\text{mín}}\rangle \;=\; |0, -\frac{2}{3}\rangle\,.$$

$$T_\ominus\,|I_{3\,\text{máx}}, y\rangle = |I_{3\,\text{máx}} - 1, y\rangle\,, \quad \longrightarrow \quad T_\ominus\,|\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle = |\frac{1}{2} - 1, \frac{1}{3}\rangle = |-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle\,.$$

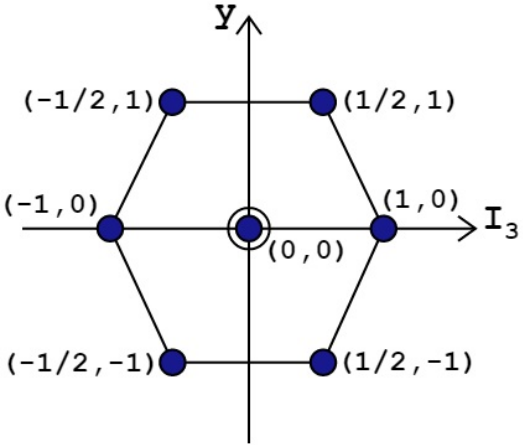


Exemplo: Representação 6: $p = 2,\ q = 0$
Diagrama:



Isospin, Hipercarga e Operadores escada

Exemplo: Representação 8: $p = 1,\ q = 1 \qquad D(1,0) = 3,$
Diagrama:



Isospin, Hipercarga e Operadores escada

Produto de Representações: $3 \otimes 3^\star = 1 \oplus 8$

$$I_3^{(3\otimes 3^\star)} = I_3^{(3)} \oplus I_3^{(3^\star)}, \qquad y^{(3\otimes 3^\star)} = y^{(3)} \oplus y^{(3^\star)}.$$

Em termos dos pesos de cada representação, os estados ficam

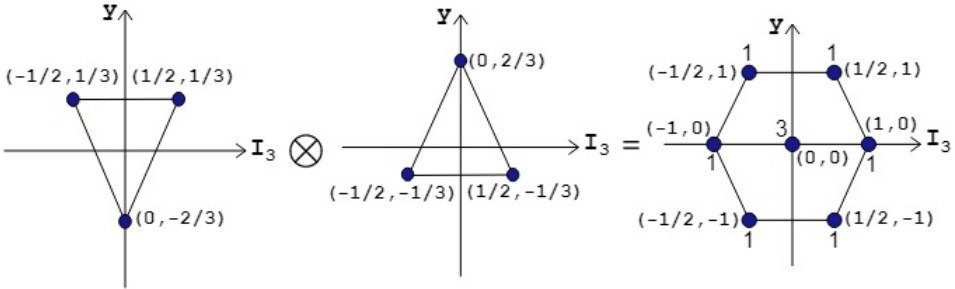
$$|I_3, y\rangle^{(3\otimes 3^\star)} = |I_3, y\rangle^{(3)} \oplus |I_3, y\rangle^{(3^\star)}.$$

Tabela resultante

$3 \quad \vert \quad 3^\star$	$\vert -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle$	$\vert \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle$	$\vert 0, \frac{2}{3}\rangle$
$\vert \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle$	$\vert 0, 0\rangle$	$\vert 1, 0\rangle$	$\vert \frac{1}{2}, 1\rangle$
$\vert -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle$	$\vert -1, 0\rangle$	$\vert 0, 0\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}, 1\rangle$
$\vert 0, -\frac{2}{3}\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}, -1\rangle$	$\vert \frac{1}{2}, -1\rangle$	$\vert 0, 0\rangle$

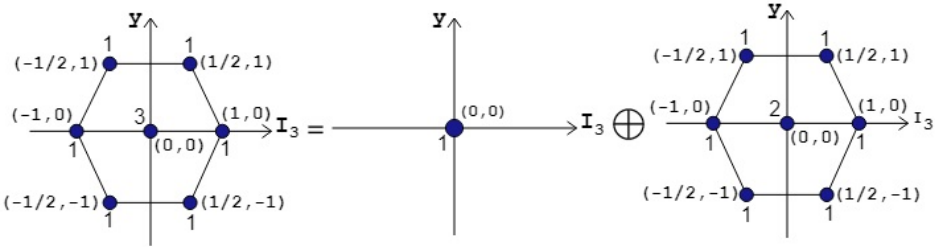
Isospin, Hipercarga e Operadores escada

Diagrama do produto de representações $3 \otimes 3^{\star} = 1 \oplus 8$:



Isospin, Hipercarga e Operadores escada

Decomposição em soma direta $3 \otimes 3^{\star} = 1 \oplus 8$:



Isospin, Hipercarga e Operadores escada

Produto: $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$:

$$I_3^{(3\otimes3\otimes3)} = I_3^{(3)} \oplus I_3^{(3)} \oplus I_3^{(3)}, \qquad y^{(3\otimes3\otimes3)} = y^{(3)} \oplus y^{(3)} \oplus y^{(3)},$$

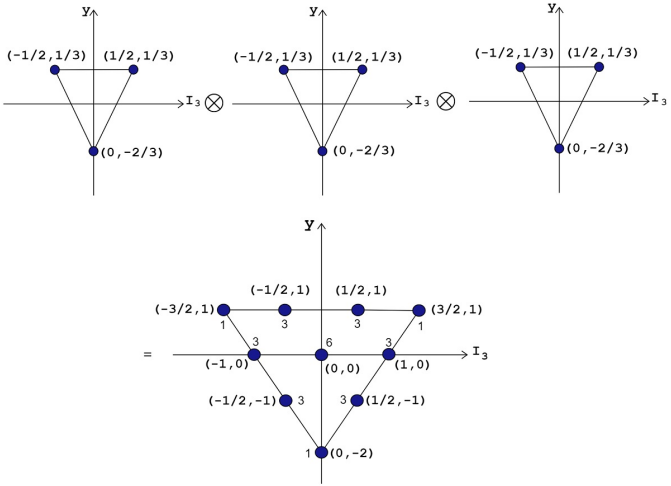
Estados

$$|I_3, y\rangle^{(3\otimes3\otimes3)} = |I_3, y\rangle^{(3)} \oplus |I_3, y\rangle^{(3)} \oplus |I_3, y\rangle^{(3)}$$

$3 \quad \vert \quad 3 \otimes 3$	$\vert 1, \frac{2}{3}\rangle$	$\vert 0, \frac{2}{3}\rangle$	$\vert \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle$	$\vert 0, \frac{2}{3}\rangle$	$\vert -1, \frac{2}{3}\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle$	$\vert \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle$	$\vert 0,$
$\vert \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle$	$\vert \frac{3}{2}, 1\rangle$	$\vert \frac{1}{2}, 1\rangle$	$\vert 1, 0\rangle$	$\vert \frac{1}{2}, 1\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}, 1\rangle$	$\vert 0, 0\rangle$	$\vert 1, 0\rangle$	$\vert 0, 0\rangle$	$\vert \frac{1}{2},$
$\vert -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle$	$\vert \frac{1}{2}, 1\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}, 1\rangle$	$\vert 0, 0\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}, 1\rangle$	$\vert -\frac{3}{2}, 1\rangle$	$\vert -1, 0\rangle$	$\vert 0, 0\rangle$	$\vert -1, 0\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}$
$\vert 0, -\frac{2}{3}\rangle$	$\vert 1, 0\rangle$	$\vert 0, 0\rangle$	$\vert \frac{1}{2}, -1\rangle$	$\vert 0, 0\rangle$	$\vert -1, 0\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}, -1\rangle$	$\vert \frac{1}{2}, -1\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}, -1\rangle$	$\vert 0,$

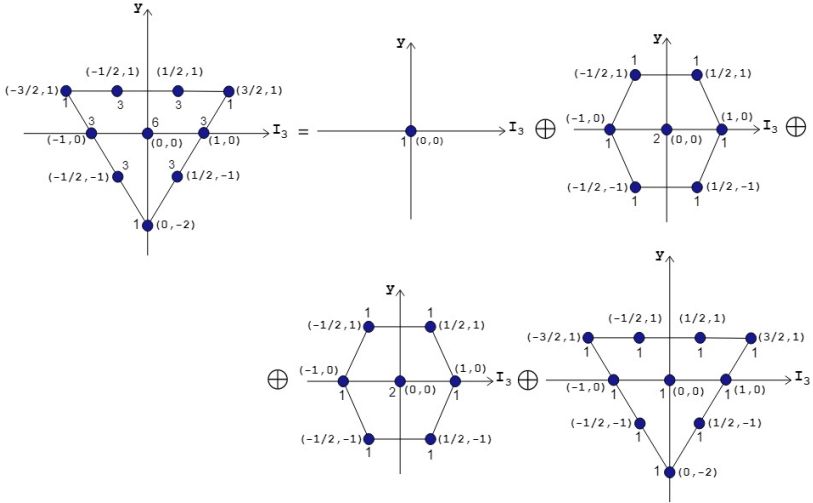
Isospin, Hipercarga e Operadores escada

Diagrama: $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$



Isospin, Hipercarga e Operadores escada

Decomposição em soma direta: $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$



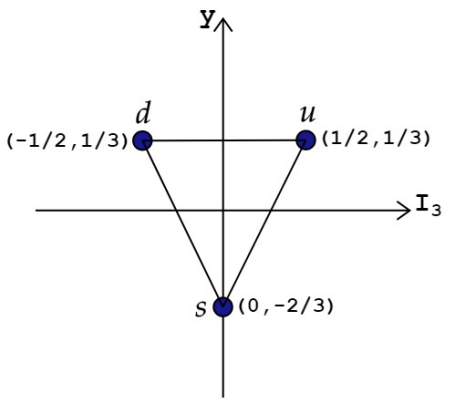
O Modelo dos QUARKS

Diagramas de Peso e o Modelo de Quarks

- Obter uma representação de SU(3), significa obter geradores que respeitam as leis de composição do grupo.
- É possível colocar os pesos de uma representação num gráfico do tipo: $I_3 \times Y$.
- Todos os hádrons constituídos dos quarks up, down e strange, bem como o dual destes (anti-quarks), são formados a partir de produto de representações de SU(3).
- O modelo G. Zweig de quarks classifica os hádrons a partir dos seguintes produto de representações:

$$
\begin{aligned}
3 \otimes 3^{\star} &= 1 \oplus 8 \quad \text{(mésons)} \\
3 \otimes 3 \otimes 3 &= 1 \oplus 8_s \oplus 8_a \oplus 10 \quad \text{(bárions)}
\end{aligned}
$$

Quarks e Diagramas de Peso da Representação Fundamental e sua Dual



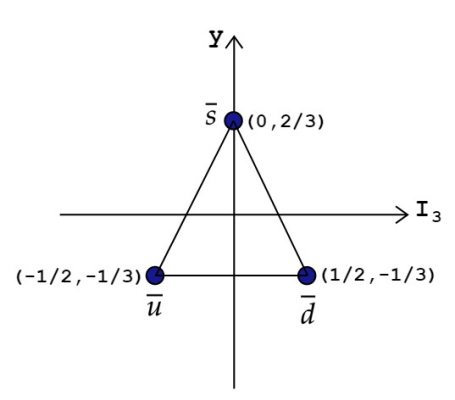


Figura: Diagramas de pesos dos quarks enquadrados na representação 3 e $3^{\star}$

Operadores escada e os quarks

- Os operadores escada definidos nas equações 6-8 possuem a propriedade de abaixar ou aumentar os autovalores do peso $|I_3, y\rangle$. Aplicando tais operadores nos quarks obtemos os seguintes resultados:

$$T_\ominus |u\rangle = |d\rangle \,, \quad T_\oplus |d\rangle = |u\rangle$$

$$U_\ominus |d\rangle = |s\rangle \,, \quad U_\oplus |s\rangle = |d\rangle$$

$$V_\ominus |u\rangle = |s\rangle \,, \quad V_\oplus |s\rangle = |u\rangle$$

- De forma análoga pode ser aplicado aos anti-quarks.

Relação de Gell-Mann e Nishijima

- A carga elétrica pode ser calculada a partir da relação,

$$Q = \left(I_3 + \frac{Y}{2}\right) e \qquad Y = B + S$$

- A partir dos autovalores contidos nos geradores $T_3 = \lambda_3$ e $Y = \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda_8$, obtemos a matriz carga elétrica dos objetos descritos pela representação fundamental.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} e$$

- Da matriz acima podemos identificar $q_u = \frac{2}{3}e$, $q_d = -\frac{1}{3}e$ e $q_s = -\frac{1}{3}e$

Massas dos Quarks

Partícula	I	I_3	B	S	Q(e)	Massa (Mev)
u	$1/2$	$1/2$	$1/3$	0	$2/3$	$2.2 \pm 0.5/0.4$
d	$1/2$	$-1/2$	$1/3$	0	$-1/3$	$4.7 \pm 0.5/0.3$
s	0	0	$1/3$	-1	$-1/3$	$95 \pm 9/3$

Tabela: Quarks de sabores up, down e strange com seus números quânticos e suas respectivas massas. Fonte: particle data group 2018.

Representações Mesônicas

Singleto e Octeto mesônicos escalares $J = 0$

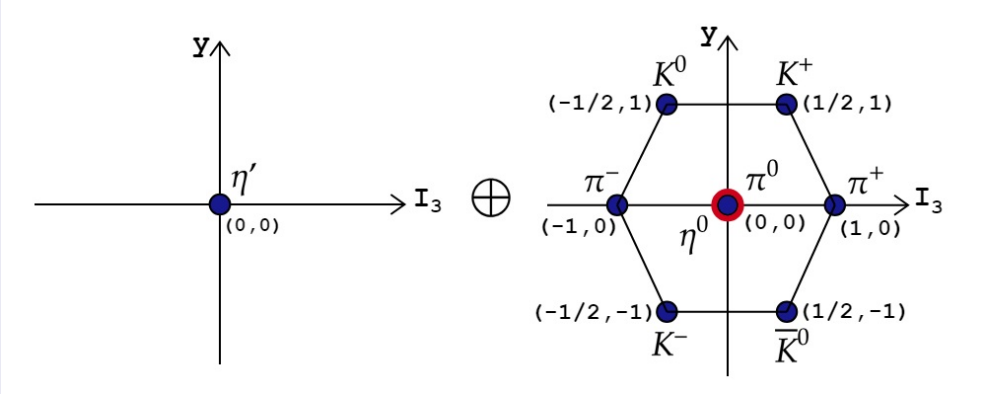


Figura: Diagramas de pesos dos mésons escalares

Representações Mesônicas

Composição e massas dos mésons escalares

Partícula	Composição	Massa
K^+	$u\bar{s}$	493.677 ± 0.016
K^0	$d\bar{s}$	497.611 ± 0.013
π^+	$-u\bar{d}$	139.57061 ± 0.00024
π^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u} - d\bar{d}\right)$	134.9770 ± 0.0005
η^0	$\frac{1}{\sqrt{6}}\left(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}\right)$	547.862 ± 0.017
π^-	$d\bar{u}$	139.57061 ± 0.00024
$\bar{K}^0$	$-s\bar{d}$	497.611 ± 0.013
K^-	$s\bar{u}$	493.677 ± 0.016
η'	$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}\right)$	957.78 ± 0.06

Tabela: Mésons escalares com suas composições e suas respectivas massas. Fonte: PDG 2018.

Representações Mesônicas

Singleto e Octeto mesônicos vetoriais - $J = 1$

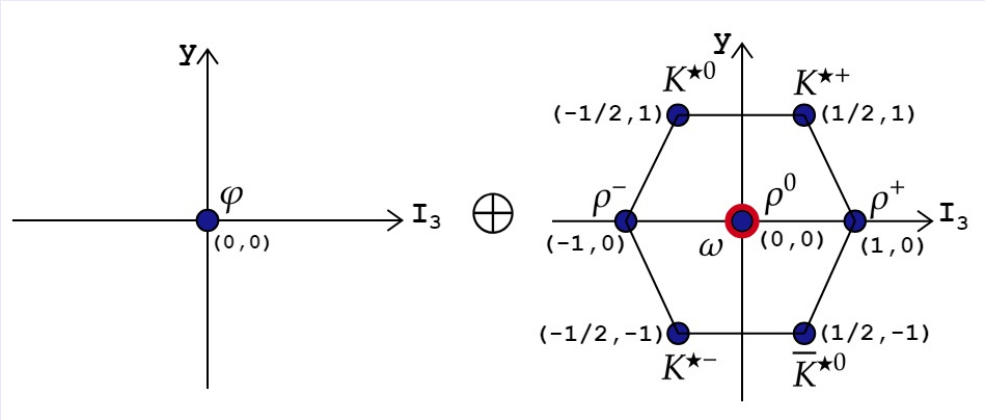


Figura: Diagramas de pesos dos mésons vetoriais

Representações Mesônicas

Composição e massas dos mésons vetoriais

Partícula	Composição	Massa (Mev)
$K^{\star +}$	$u\bar{s}$	891.76 ± 0.25
$K^{\star 0}$	$d\bar{s}$	895.55 ± 0.20
ρ^{+}	$-u\bar{d}$	775.26 ± 0.25
ρ^{0}	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u} - d\bar{d}\right)$	775.26 ± 0.25
ρ^{-}	$d\bar{u}$	775.26 ± 0.25
$\bar{K}^{\star 0}$	$-s\bar{d}$	895.55 ± 0.20
$K^{\star -}$	$s\bar{u}$	891.76 ± 0.25
ω	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u} + d\bar{d}\right)$	782.65 ± 0.12
φ	$s\bar{s}$	1019.461 ± 0.016

Tabela: Mésons vetoriais com suas composições e suas respectivas massas. Fonte: PDG 2018.

Representações Bariônicas

Octeto bariônico $J = \frac{1}{2}$

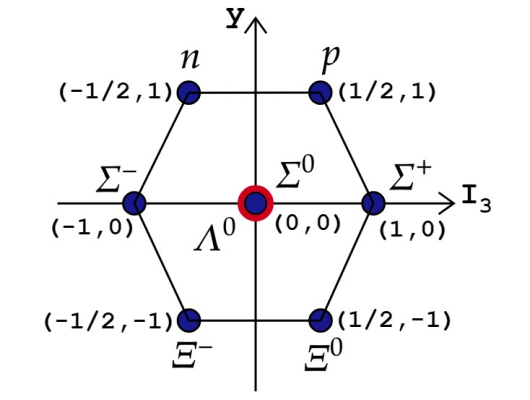


Figura: Diagramas de peso do octeto e singleto bariônico

Representações Bariônicas

Composição e massas dos Bárions - 8_a

Partícula	Composição	Massa (Mev)
p	$\frac{1}{\sqrt{2}}(udu - duu)$	938.272081 ± 0.000006
n	$\frac{1}{\sqrt{2}}(udd - dud)$	939.565413 ± 0.000006
Σ^+	$\frac{1}{\sqrt{2}}(usu - suu)$	1189.37 ± 0.07
Σ^0	$\frac{1}{2}(dsu + usd - sdu - sud)$	1192.642 ± 0.024
Σ^-	$\frac{1}{\sqrt{2}}(dsd - sdd)$	1197.449 ± 0.030
Λ^0	$\frac{1}{\sqrt{12}}(2uds - 2dus + sdu - dsu + usd - sud)$	111563.683 ± 0.006
Ξ^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(uss - sus)$	1314.86 ± 0.20
Ξ^-	$\frac{1}{\sqrt{2}}(dss - sds)$	1321.71 ± 0.07

Tabela: Octeto bariônico antissimétrico com as massas das partículas. Fonte: PDG 2018.

Representações Bariônicas

Composição e massas dos Bárions - 8_s

Partícula	Composição	Massa (Mev)
p	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2uud - udu - duu)$	938.272081 ± 0.000006
n	$\frac{1}{\sqrt{6}}(udd + dud - 2ddu)$	939.565413 ± 0.000006
Σ^+	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2uus - usu - suu)$	1189.37 ± 0.07
Σ^0	$\frac{1}{\sqrt{12}}(2uds + 2dus - usd - dsu - sud - sdu)$	1192.642 ± 0.024
Σ^-	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2dds - dsd - sdd)$	1197.449 ± 0.030
Λ^0	$\frac{1}{2}(usd + sud - dsu - sdu)$	111563.683 ± 0.006
Ξ^0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(uss + sus - 2ssu)$	1314.86 ± 0.020
Ξ^-	$\frac{1}{\sqrt{6}}(dss + sds - 2ssd)$	1321.71 ± 0.07

Tabela: Octeto bariônico simétrico com as massas das partículas. Fonte: PDG 2018.

Representações Bariônicas

Decupleto bariônico $J = \frac{3}{2}$

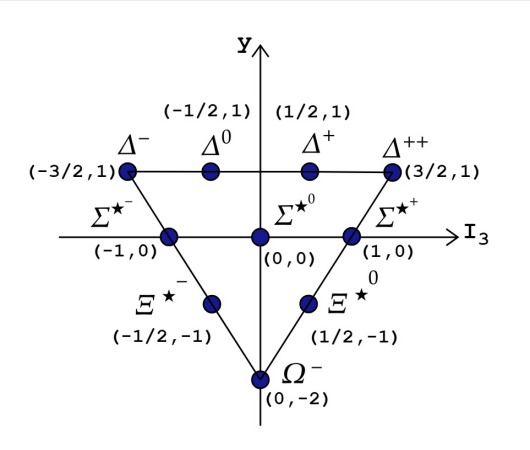


Figura: Diagrama de Peso do Decupleto bariônico

Representações Bariônicas

Composição e massas dos Bárions - 10

Partícula	Composição	Massa (Mev)
Δ^{++}	uuu	1232
Δ^{+}	$\frac{1}{\sqrt{3}}(duu + udu + uud)$	1232
Δ^{0}	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + dud + udd)$	1232
Δ^{-}	ddd	1232
$\Sigma^{\star +}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(suu + usu + uss)$	1189.37 ± 0.07
$\Sigma^{\star 0}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(sdu + sud + dsu + usd + dus + uds)$	1192.642 ± 0.024
$\Sigma^{\star -}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(sdd + dsd + dds)$	1197.449 ± 0.030
$\Xi^{\star 0}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ssu + sus + uss)$	1314.86 ± 0.20
$\Xi^{\star -}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ssd + sds + dss)$	1321.71 ± 0.07
Ω^{-}	sss	1672.45 ± 0.29

Conclusão

- Os números quânticos de sabor, isospin e hipercarga, são bons números quânticos porque organizam as partículas por famílias dentro de uma dada representação.
- A simetria em relação as massas é uma boa simetria aproximada no presente trabalho, pois as diferenças entre as massas são pequenas dentro de um conjunto de partículas.
- O número quântico de cor, aqui, deve ser colocado "à mão", capaz de manter o princípio de exclusão de Pauli para as representações Hadrônicas.
- Este trabalho pode ser aplicado à alunos de IC e TCC, na Licenciatura ou bacharelado, pois requer apenas conhecimentos de física quântica, álgebra linear e clássificação de partículas subatômicas.
- Pode ser trabalhado também com alunos de ensino médio, apresentando a técnica via diagrama de pesos.

Referências

[1] Gell-Mann, M. "The Eightfold Way: A Theory of Strong Interaction Symmetry". Pasadena, CA: California Inst. of Tech.

[2] Gell-Mann, M. "A Schematic Model of Baryons and Mesons", Phys.Lett. 8 (1964) 214-215.

[3] G. Zweig (1980) [1964]. "An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking II". Developments in the Quark Theory of Hadrons. 1. Hadronic Press. pp. 22–101.

[4] João Barcelos Neto, Matemática Para Físicos Vol 1, Editora LF, SP.

[5] Walter Greiner, Quantum Mechanics Symmetries, Editora Springer, Berlim.

[6] J. M. F. Bassalo, Teoria de Grupos, Editora LF, SP.

[7] Morton Hamermesh, Group theory and its Application to Physical problems, Editora Addison-Wesley, Boston.

Obrigado!